

平成18年度（2006年度）日本留学試験

数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコース一つだけを選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題用紙を持ち帰ることはできません。

II 問題用紙に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～10ページ、コース2は11～21ページにあります。
4. 問題用紙には、メモや計算などを書いてもいいです。

III 解答用紙に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆（HB）で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－（マイナスの符号）、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。

【例】

- (1) 根号（ $\sqrt{\quad}$ ）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
 (例： $\sqrt{12}$ のときは、 $2\sqrt{3}$ と答えます。)
- (2) 符号は分子につけ、分母・分子は既約分数（reduced fraction）にして答えてください。
 (例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ 、 $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)
- (3) $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、以下のようにマークしてください。
- (4) $\boxed{D}\boxed{E}x$ を $-x$ とするとき、Dを－、Eを1とし、以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

3. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

受験番号			*					*					
名前													

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコース 一つだけ を選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースが正しくマークされていないと、採点されません。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px; display: inline-block;"> コース 2 Course 2 </div>
○	●

I

問 1 $a > 0$ とする。2次関数 $f(x) = ax^2 - 6ax + b$ の $1 \leq x \leq 4$ における最大値が 12, 最小値が 4 であるとき, 定数 a, b の値を求めたい。

$f(x)$ は

$$f(x) = a(x - \boxed{\text{A}})^2 + b - \boxed{\text{B}}a$$

と変形できる。

x のとる値の範囲は $1 \leq x \leq 4$ であるから, $f(x)$ は $x = \boxed{\text{C}}$ で最大となり, $x = \boxed{\text{D}}$ で最小となる。よって

$$a = \boxed{\text{E}}, \quad b = \boxed{\text{FG}}$$

を得る。

問 2 次の問題文中の $\boxed{\text{H}}$ ~ $\boxed{\text{L}}$ に対して、それぞれの選択肢の中から当てはまるものを一つ選びなさい。

- (1) 数直線上の部分集合 A, B, C を $A = \{x \mid 3 < x < 6\}$, $B = \{x \mid -1 < x < 1\}$, $C = \{x \mid -3 < x < 5\}$ とするとき

$$A \cup B = \boxed{\text{H}}, \quad \overline{(A \cup B)} \cap C = \boxed{\text{I}}$$

である。ただし、 $\overline{(A \cup B)}$ は $A \cup B$ の補集合を表す。

- ① $\{x \mid -3 < x \leq -1 \text{ または } 1 \leq x \leq 3\}$ ④ ϕ
 ② $\{x \mid -3 < x < 5\}$ ③ $\{x \mid -3 < x < -1 \text{ または } 1 < x < 3\}$
 ④ $\{x \mid -1 < x < 1 \text{ または } 3 < x < 6\}$ ⑤ $\{x \mid x < 5 \text{ または } 6 \leq x\}$
- (2) (i) $a > 3$ かつ $b > 3$ であることは、 $a + b > 5$ であるための $\boxed{\text{J}}$ 。
 (ii) $a > 2$ かつ $b > 2$ であることは、 $a + b > 5$ であるための $\boxed{\text{K}}$ 。
 (iii) $|a + b| > 5$ であることは、 $a + b > 5$ であるための $\boxed{\text{L}}$ 。
- ① 必要十分条件である
 ① 必要条件であるが、十分条件ではない
 ② 十分条件であるが、必要条件ではない
 ③ 必要条件でも十分条件でもない

注) 部分集合 : subset , 補集合 : complement

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。 $\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{M}}$ ~ $\boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

II

問 1 $\frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{5} = \frac{x+y}{-1} \neq 0$ とするとき

$$x:y:z = \boxed{\text{AB}} : 1 : \boxed{\text{C}}$$

であり

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{yz + zx + xy} = \boxed{\text{DE}}$$

である。

問 2 等差数列 $\{a_n\}$ において, $a_1 = 2$, $a_p = 30$, $a_q = 51$ とする。

(1) 公差を d とすると

$$(p-1)d = \boxed{\text{FG}}, \quad (q-1)d = \boxed{\text{HI}}$$

が成り立つ。

(2) 公差 d が 1 より大きい整数になるのは, $d = \boxed{\text{J}}$ のときで, そのとき, 初項から第 q 項までの和は $\boxed{\text{KLM}}$ である。

(3) 一般に, p と q の間には

$$\boxed{\text{N}}q = \boxed{\text{O}}p - 3$$

が成り立つ。

注) 等差数列 : arithmetic progression (sequence) , 公差 : common difference

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。 $\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{P}} \sim \boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

III

問 1 平面上に三角形 OAB と点 P があり

$$7\overrightarrow{AP} + 5\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{OP} = \vec{0}$$

を満たしている。

(1) $\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{A}}{\boxed{BC}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{D}}{\boxed{E}} \overrightarrow{OB}$ である。

(2) 直線 OP と直線 AB との交点を Q とする。 $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP}$ とおくと

$$t = \frac{\boxed{F}}{\boxed{G}}$$

である。

問 2 次の各設問に答えなさい。

(1) $0^\circ \leq x < 360^\circ$ とする。関数 $f(x) = 2 \sin x - \cos 2x$ は

$x = \boxed{\text{HI}}^\circ$ のとき、最大値 $\boxed{\text{J}}$ をとり、

$x = \boxed{\text{KLM}}^\circ$ および $x = \boxed{\text{NOP}}^\circ$ のとき、最小値 $\frac{\boxed{\text{QR}}}{\boxed{\text{S}}}$ をとる。

ただし、 $\boxed{\text{KLM}}^\circ < \boxed{\text{NOP}}^\circ$ とする。

(2) $10^x = a$, $10^y = b$, $xy \neq 0$ とするとき

$$\log_{\sqrt{a}} b^2 = \frac{\boxed{\text{T}}y}{x}$$

と表せる。

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。 $\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{U}} \sim \boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

IV

問 1 a, b を定数とし, x の関数

$$f(x) = \log \frac{ax^2 + 7}{bx + 3}$$

を考える。ただし, 対数は自然対数である。

$$(1) \quad f'(2) = \frac{\boxed{A} a}{\boxed{B} a + \boxed{C}} - \frac{b}{\boxed{D} b + \boxed{E}}$$

(2) $f(x)$ が $x = 2$ で極小値 0 をとれば

$$a = \boxed{F}, \quad b = \boxed{G}$$

である。

注) 自然対数 : natural logarithm

問 2 $f(a) = \int_0^{2\pi} |\sin(x+a) - \sin x| dx$ ($0 < a < \pi$) とする。

(1) には次の ① ~ ⑤ のうちから当てはまるものを一つ選びなさい。

$f(a)$ は、 $f(a) = \text{} \int_0^{2\pi} |\cos(x + \frac{a}{2})| dx$ と変形できる。

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| ① $\sin \frac{a}{2}$ | ④ $\cos \frac{a}{2}$ |
| ② $2 \sin \frac{a}{2}$ | ⑤ $2 \cos \frac{a}{2}$ |
| ③ $\frac{1}{2} \sin \frac{a}{2}$ | ⑥ $\frac{1}{2} \cos \frac{a}{2}$ |

(2) には次の ① ~ ③ のうちから当てはまるものを一つ選びなさい。

関数 $y = |\cos(x + \frac{a}{2})|$ の周期は である。

- | | | | |
|---------|----------|-------------------|-------------------|
| ① π | ② 2π | ③ $\frac{\pi}{2}$ | ④ $\frac{\pi}{4}$ |
|---------|----------|-------------------|-------------------|

この関数のグラフを考えて、次の定積分の値を求めると

$$\int_0^{2\pi} |\cos(x + \frac{a}{2})| dx = \text{}$$

である。

(3) $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{a} = \text{}$

注) 周期 : period

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 L ~ Z には何も書かないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の V の欄には何も書かないでください。

この問題用紙を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉

コース 1

問	I										II		
	問 1					問 2					問 1		
解答欄	AB	C	D	E	FG	H	I	J	K	L	ABC	DE	F
正解	39	1	3	2	22	4	0	2	3	1	224	12	3

問	II		III								
	問 2		問 1					問 2			
解答欄	GHI	JKLM	A	BC	DEF	GHI	JK	LMN	O	PQ	R
正解	511	1655	6	34	103	103	23	315	3	16	8

問	IV						
	問 1			問 2			
解答欄	AB	CDE	FG	H	IJ	K	L
正解	-2	-11	14	3	52	4	6

コース 2

問	I										II	
	問 1					問 2					問 1	
解答欄	AB	C	D	E	FG	H	I	J	K	L	ABC	DE
正解	39	1	3	2	22	4	0	2	3	1	-27	-6

問	II					III								
	問 2					問 1			問 2					
解答欄	FG	HI	J	KLM	NO	ABC	DE	FG	HI	J	KLM	NO	QRS	T
正解	28	49	7	212	47	715	13	54	90	3	210	330	-32	4

問	IV							
	問 1				問 2			
解答欄	ABC	DE	F	G	H	I	J	K
正解	447	23	1	4	2	0	4	4