問題冊子

平成19年度（2007年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～12ページ，コース２は13～25ページにあります。

4．問題冊子には，メモや計算などを書いてもいいです。

III　解答用紙に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆（HB）で記入してください。

2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－（マイナスの符号），または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。

【例】

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。（例：$\sqrt{12}$ のときは，$2\sqrt{3}$ と答えます。）

(2)　符号は分子につけ，分母・分子は既約分数（reduced fraction）にして答えてください。

（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\mathrm{A}}\sqrt{\boxed{\mathrm{B}}}}{\boxed{\mathrm{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，以下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\mathrm{DE}}\,x$ を $-x$ とするとき，Dを－，Eを１とし，以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊				＊						
名　　前													

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　x 軸に接する放物線を C とする。C をグラフとする 2 次関数は a, p を定数として

$$y = a(x-p)^2$$

と表される。

(1)　C が点 $(1, 2)$ を通るとき，a, p は

$$\boxed{\textsf{A}} = a(\boxed{\textsf{B}} - p)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たす。

(2)　さらに，C を x 軸方向に右へ 3 だけ平行移動すると，そのグラフは点 $(2, 8)$ を通る。このとき，a, p は

$$\boxed{\textsf{C}} = a(\boxed{\textsf{D}} + p)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を満たす。

(3)　① と ② より，a を消去すると

$$(\boxed{\textsf{D}} + p)^2 = \boxed{\textsf{E}}(\boxed{\textsf{B}} - p)^2$$

である。よって，$p > 1$ を満たす p を求めると

$$p = \boxed{\textsf{F}}$$

であり

$$a = \frac{\boxed{\textsf{G}}}{\boxed{\textsf{H}}}$$

となる。

問 2　a, b, k を実数とする。次の不等式を考える。

$$a^2 + b^2 \leqq 21k - 3k^2 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

(1)　$a=b=0$ のとき，① が成り立つような k の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{I}} \leqq k \leqq \boxed{\mathsf{J}}$$

である。

(2)　$k > 0$ とする。$a=b=0$ であることが，① が成り立つための必要十分条件となるのは $k = \boxed{\mathsf{K}}$ のときである。

(3)　$a=b=0$ であることが，① が成り立つための十分条件であって必要条件ではないような整数 k の最大値は $\boxed{\mathsf{L}}$ である。

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{M}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ には何も書かないでください。

II

問 1　n は整数で，$1 < n$ とする。n^3 を 42 で割ったときの余りが n であるような，n の最大値，および，最小値を求めよう。

n^3 を 42 で割ったときの商を q とすると

$$n^3 = \boxed{\mathrm{AB}}\,q + n \qquad (1 < n < \boxed{\mathrm{AB}}) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。等式 ① は

$$(n - \boxed{\mathrm{C}})\,n\,(n + \boxed{\mathrm{D}}) = \boxed{\mathrm{AB}}\,q \qquad (1 < n < \boxed{\mathrm{AB}}) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

と変形できる。

$n - \boxed{\mathrm{C}}$，n，$n + \boxed{\mathrm{D}}$ の中には，つねに，2 の倍数と $\boxed{\mathrm{E}}$ の倍数が含まれており，等式 ② の形から，さらに $n - \boxed{\mathrm{C}}$，n，$n + \boxed{\mathrm{D}}$ の中には，$\boxed{\mathrm{F}}$ の倍数が含まれている。

このような n を調べると，n の最大値は $\boxed{\mathrm{GH}}$ であり，最小値は $\boxed{\mathrm{I}}$ である。

注）余り：remainder，商：quotient

問 2　$\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は，初項 $a_1 = x$，公差 -1 の等差数列とする。このとき，すべての自然数 k に対して

$$a_{2k-1} - a_{2k+1} = \boxed{\text{J}}$$

$$a_{2k}{}^2 = (x+1)^2 - \boxed{\text{K}}\,k(x+1) + \boxed{\text{L}}\,k^2$$

となる。

(1)　$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} - a_{2k+1})a_{2k}{}^2$ とおくと

$$\frac{T_n}{2n} = (x+1)^2 - \boxed{\text{M}}\left(n + \boxed{\text{N}}\right)(x+1) + \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}}\left(n + \boxed{\text{Q}}\right)\left(\boxed{\text{R}}\,n + 1\right)$$

である。

(2)　(1) において $T_8 < 352$ であれば，$\boxed{\text{S}} < x < \boxed{\text{T}}$ であり，特に x が整数であれば，$a_8 = \boxed{\text{U}}$ である。

注）公差：common difference，等差数列：arithmetic progression

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{V}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ には何も書かないでください。

III

問 1　$0° \leqq \alpha \leqq 120°$, $0° \leqq \beta \leqq 120°$ とする。座標平面上に，3 点

$$\mathrm{O}\,(0,0),\quad \mathrm{A}\,(2\sqrt{3}, -2\sqrt{6}),\quad \mathrm{B}\,(2\sqrt{6}, 2\sqrt{3})$$

があり，点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cos\alpha + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\sin\beta$$

を満たしている。

(1)　$\cos\alpha$, $\sin\beta$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathsf{AB}}}{\boxed{\mathsf{C}}} \leqq \cos\alpha \leqq \boxed{\mathsf{D}},\quad \boxed{\mathsf{E}} \leqq \sin\beta \leqq \boxed{\mathsf{F}}$$

である。

(2)　$\boxed{\mathsf{G}}$ には，下の ⓪ ～ ③ のうちから最も適するものを 1 つ選びなさい。

点 P の存在する範囲は $\boxed{\mathsf{G}}$ の内部および周である。

⓪ 正方形　① 長方形　② ひし形　③ 平行四辺形

また，その図形の面積は $\boxed{\mathsf{HI}}$ である。

(3)　$\alpha=\beta$ とする。$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \boxed{\mathsf{JK}}$ であるから，点 P の存在する範囲は半径 $\boxed{\mathsf{L}}$ の円の弧で，その弧の長さは $\boxed{\mathsf{M}}\,\pi$ である。

注）ひし形：rhombus，弧：arc

- 計算欄 (memo) -

問 2　x, y が不等式

$$2\log_3(x-y) \leqq \log_3 x + \log_3 y \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしている。

このとき，対数の真数の条件より

$$\boxed{\mathsf{N}} < \frac{y}{x} < \boxed{\mathsf{O}}$$

である。

ここで ① を変形すると

$$x^2 - \boxed{\mathsf{P}}\,xy + y^2 \leqq \boxed{\mathsf{Q}}$$

が得られるから，$\dfrac{y}{x}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathsf{R}} - \sqrt{\boxed{\mathsf{S}}}}{\boxed{\mathsf{T}}} \leqq \frac{y}{x} < \boxed{\mathsf{U}}$$

である。

注）対数の真数の条件：the condition on the domain of a logarithm

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{V}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ には何も書かないでください。

IV

問 1　$f(x) = \log \dfrac{1}{x}$　$(x > 0)$　とする。ただし，log は自然対数である。

(1)　$f'(x) = \dfrac{\boxed{\mathsf{AB}}}{x}$,

$$\int x f(x)\,dx = \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}x^2 f(x) + \frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}x^2 + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

(2)　t は $0 < t < \dfrac{1}{2}$ を満たす数とする。xy 平面において，曲線 $y = xf(x)$ と直線 $x = t$，直線 $x = 2t$ および x 軸によって囲まれた部分の面積を $S(t)$ とするとき，$S(t)$ を t，$f(t)$，$f(2t)$ を用いて表すと

$$S(t) = \left(\boxed{\mathsf{G}}\, f(2t) - \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}} f(t) + \frac{\boxed{\mathsf{J}}}{\boxed{\mathsf{K}}} \right) t^{\boxed{\mathsf{L}}}$$

となる。

注）　自然対数：natural logarithm，積分定数：constant of integration

問 2　$f(x) = e^{2x} - 4e^{x} - 6x + a$ とする。ただし，e は自然対数の底で，log は自然対数である。

(1)　$f'(x) = \boxed{\text{M}}\, e^{2x} - \boxed{\text{N}}\, e^{x} - \boxed{\text{O}}$ であるから，$f(x)$ は $x = \log \boxed{\text{P}}$ で最小になる。

(2)　$f(x) = 0$ を満たす x が区間 $0 < x < \log 4$ の中に 2 個存在するための必要十分条件は

$$\boxed{\text{Q}} \log \boxed{\text{R}} < a < \boxed{\text{S}} + 6 \log \boxed{\text{T}} \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。

(3)　a が不等式 ① を満たすとする。このとき，$f(x) = 0$ を満たす 2 つの解を α, β $(\alpha < \beta)$ とおくと，つねに

$$\alpha < \log \boxed{\text{U}} < \beta$$

が成り立つ。

注）　自然対数の底 : the base of the natural logarithm ,　自然対数 : natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 **V** ～ **Z** には何も書かないでください。

コース2の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の V の欄には何も書かないでください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数　学〉

コース1

問	Ⅰ									Ⅱ				
	問1					問2				問1				
解答欄	AB	CD	E	F	GH	I	J	K	L	A	BC	DEF	GH	I
正解	21	81	4	3	12	0	7	7	6	6	−2	253	−6	3

問	Ⅱ				Ⅲ									
	問2				問1					問2				
解答欄	JK	LM	NO	PQRS	A	B	CD	EFG	HIJ	KLM	N	OPQ	RSTU	VWX
正解	48	12	34	1124	2	2	45	105	723	135	2	512	1713	100

問	Ⅳ											
	問1						問2					
解答欄	AB	CD	EF	GH	IJK	LMNO	P	QR	S	TUV	WXY	Z
正解	15	23	23	32	532	5343	2	34	7	−23	−43	7

コース2

問	Ⅰ								
	問1					問2			
解答欄	AB	CD	E	F	GH	I	J	K	L
正解	21	81	4	3	12	0	7	7	6

問	Ⅱ											
	問1						問2					
解答欄	AB	CD	E	F	GH	I	J	KL	MN	OPQR	ST	U
正解	42	11	3	7	41	6	2	44	21	2312	79	1

問	Ⅲ											
	問1							問2				
解答欄	ABCD	EF	G	HI	JK	L	M	N	O	PQ	RST	U
正解	-121	01	1	54	36	6	4	0	1	30	352	1

問	Ⅳ											
	問1							問2				
解答欄	AB	CD	EF	G	HI	JK	L	MNO	P	QR	ST	U
正解	−1	12	14	2	12	34	2	246	3	64	33	3