

平成19年度（2007年度）日本留学試験

# 数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコース一つだけを選んで解答してください。

**I 試験全体に関する注意**

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

**II 問題冊子に関する注意**

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～12ページ、コース2は13～23ページにあります。
4. 問題冊子には、メモや計算などを書いてもいいです。

**III 解答用紙に関する注意**

1. 解答は、解答用紙に鉛筆（HB）で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－（マイナスの符号）、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。

【例】

- (1) 根号（ $\sqrt{\quad}$ ）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。  
 (例： $\sqrt{12}$ のときは、 $2\sqrt{3}$ と答えます。)
- (2) 符号は分子につけ、分母・分子は既約分数（reduced fraction）にして答えてください。  
 (例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ 、 $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)
- (3)  $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、以下のようにマークしてください。
- (4)  $\boxed{DE}x$ を $-x$ とすると、Dを－、Eを1とし、以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

3. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*					
名前												

# 数学 コース 2

(上級コース)

## 「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコース 一つだけ を選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースが正しくマークされていないと、採点されません。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px; display: inline-block;">                     コース 2 Course 2                 </div>
○	●

I

問 1 2次関数  $f(x) = x^2 - ax + a^2$  の  $0 \leq x \leq 1$  における最小値  $m$  を求めよう。

$f(x)$  は

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{\boxed{A}}\right)^2 + \frac{\boxed{B}}{\boxed{C}} a^{\boxed{D}}$$

と変形できる。したがって、 $f(x)$  は

$$a \leq \boxed{E} \text{ のとき, } x = \boxed{F} \text{ で最小となり, } m = a^{\boxed{G}}$$

$$\boxed{E} < a < \boxed{H} \text{ のとき, } x = \frac{a}{\boxed{I}} \text{ で最小となり, } m = \frac{\boxed{J}}{\boxed{K}} a^{\boxed{L}}$$

$$\boxed{H} \leq a \text{ のとき, } x = \boxed{M} \text{ で最小となり, } m = \boxed{N} - a + a^{\boxed{O}}$$

となる。

数学-16

問 2 数直線上の集合  $A, B$  を

$$A = \{x \mid |x - 1| \geq 9\}, \quad B = \{x \mid a + 3 \leq x \leq 2a\}$$

とする。ただし、 $B \neq \phi$  とする。

(1)  $A = \{x \mid x \leq \boxed{\text{PQ}} \text{ または } \boxed{\text{RS}} \leq x\}$  である。

(2)  $B \neq \phi$  であるから、 $a$  のとり得る値の範囲は

$$a \geq \boxed{\text{T}}$$

である。

(3) 集合  $A, B$  に対して

実数  $x$  が「 $A$  に属する」ことは「 $B$  に属する」ための必要条件であるとする。このとき、 $a$  のとり得る値の範囲は

$$a \geq \boxed{\text{U}}$$

である。

$\boxed{\text{I}}$  の問題はこれで終わりです。 $\boxed{\text{I}}$  の解答欄  $\boxed{\text{V}} \sim \boxed{\text{Z}}$  には何も書かないでください。

II

問 1  ~  には, 下の ① ~ ⑨ のうちから最も適するもの一つずつ選びなさい。

(1)  $a, b, c$  が実数のとき

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \quad \text{A} \quad 0$$

であるから

$$ab + bc + ca \quad \text{B} \quad a^2 + b^2 + c^2$$

が成り立つ。

(2)  $a, b, c$  が実数で,  $c > 0$  とする。さらに

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b \quad \dots\dots \quad \text{①}$$

であるとき,  $a^2 + b^2 + c^2$  と  $2(ab + bc + ca)$  の大小を比べよう。

$$P = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca) \text{ とおくと}$$

$$P = (a - b)^2 - c^2 + \quad \text{C} \quad (c^2 - bc - ca)$$

となる。次に,  $Q = (a - b)^2 - c^2$ ,  $R = c^2 - bc - ca$  とおくと

$$Q = (\quad \text{D} \quad + c)(\quad \text{E} \quad - c), \quad R = -c(\quad \text{F} \quad - c)$$

となる。ここで, ① を用いれば

$$Q \quad \text{G} \quad 0, \quad R \quad \text{H} \quad 0$$

であるから

$$P \quad \text{I} \quad 0$$

である。よって

$$a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{J} \quad 2(ab + bc + ca)$$

を得る。

- ① 0      ②  $a + b$       ③ 2      ④  $a - b$       ⑤ 4  
 ⑥  $-(a + b)$       ⑦  $\leq$       ⑧  $\geq$       ⑨  $<$       ⑩  $>$

数学-18

問 2 数列  $\{a_n\}$  は次の条件を満たしている。

$$a_n > 0, \quad 4\sqrt{S_n} = a_n + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  とする。

(1)  $a_1 = \boxed{\text{K}}$  である。

(2)  $a_n$  と  $a_{n+1}$  は

$$\boxed{\text{LM}} a_{n+1} = (a_{n+1} + \boxed{\text{N}})^2 - (a_n + \boxed{\text{O}})^2$$

を満たすから

$$a_{n+1} - a_n = \boxed{\text{P}}$$

である。

(3)  $a_n = 68$  ならば,  $n = \boxed{\text{Q}}$  である。

$\boxed{\text{II}}$  の問題はこれで終わりです。  $\boxed{\text{II}}$  の解答欄  $\boxed{\text{R}} \sim \boxed{\text{Z}}$  には何も書かないでください。

III

問 1 平面上に三角形 OAB があり

$$\angle AOB = 90^\circ, \quad OA = 8, \quad OB = 6$$

である。この平面上の点 P に対して、 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + 2y\overrightarrow{OB}$  とする。

(1) P が三角形 OAB の重心であれば

$$x = \frac{\boxed{A}}{\boxed{B}}, \quad y = \frac{\boxed{C}}{\boxed{D}}$$

である。

(2)  $\angle AOB$  の二等分線と辺 AB との交点を C とすると

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\boxed{E}}{\boxed{F}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{G}}{\boxed{H}}\overrightarrow{OB}$$

となるから、P が  $\angle AOB$  の二等分線上の点であれば

$$y = \frac{\boxed{I}}{\boxed{J}}x$$

である。

(3) P が O を通り辺 AB に垂直な直線上の点であれば

$$y = \frac{\boxed{K}}{\boxed{L}}x$$

である。

---

注) 重心 : center of gravity ,  $\angle AOB$  の二等分線 : bisector of  $\angle AOB$

問 2  $x, y$  が  $x \geq 1, y \geq 1$  であり

$$\log_2 x + \log_2 y = (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たしている。このとき、 $\log_2 x = X, \log_2 y = Y$  とおくと

$$X \geq \boxed{\text{M}}, Y \geq \boxed{\text{N}}$$

であり、等式 ① は

$$\left(X - \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}}\right)^2 + \left(Y - \frac{\boxed{\text{Q}}}{\boxed{\text{R}}}\right)^2 = \frac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}$$

と変形される。したがって、 $xy$  のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{U}} \leq xy \leq \boxed{\text{V}} \quad \text{および} \quad xy = \boxed{\text{W}}$$

である。

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄  $\boxed{\text{X}} \sim \boxed{\text{Z}}$  には何も書かないでください。

IV

問 1  $f(x) = \sin x \cos^3 x$ ,  $g(x) = \sqrt{4-x}$

とする。

(1)  $f'(x) = \cos^4 x - \boxed{\text{A}} \sin^{\boxed{\text{B}}} x \cos^2 x$

$$g'(x) = \frac{\boxed{\text{CD}}}{\boxed{\text{E}} \sqrt{4-x}}$$

である。

- (2) 曲線  $y = g(x)$  の接線のうち、曲線  $y = f(x)$  の点  $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$  における接線と同じ傾きをもつものを  $l$  とする。このとき、 $y = g(x)$  と  $l$  の接点の座標は  $(\boxed{\text{F}}, \boxed{\text{G}})$  であり、 $l$  の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{HI}}}{\boxed{\text{J}}} x + \frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}$$

である。

問 2  $a$  を実数とする。定積分

$$\int_0^1 (e^x - ax)^2 dx$$

を最小にする  $a$  の値とその定積分の最小値を求めよう。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

不定積分  $\int (e^x - ax)^2 dx$  を求めると

$$\int (e^x - ax)^2 dx = \frac{1}{\boxed{\text{M}}} e^{2x} - \boxed{\text{N}} a(x-1)e^x + \frac{1}{\boxed{\text{O}}} a^2 x^{\boxed{\text{P}}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから

$$\int_0^1 (e^x - ax)^2 dx = \frac{1}{\boxed{\text{Q}}} a^2 - \boxed{\text{R}} a + \frac{1}{\boxed{\text{S}}} e^2 - \frac{1}{\boxed{\text{T}}}$$

を得る。したがって、 $a = \boxed{\text{U}}$  のとき、この定積分は最小になり、その最小値は

$$\frac{\boxed{\text{V}}}{\boxed{\text{W}}} e^2 - \frac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}}$$

である。

---

注) 積分定数 : constant of integration , 自然対数の底 : the base of the natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 Z には何も書かないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の V の欄には何も書かないでください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉

コース 1

問	I									
	問 1					問 2				
解答欄	ABCD	E	FG	H	IJKL	MNO	PQ	RS	T	U
正解	2342	0	02	2	2342	112	-8	10	3	7

問	II					III							
	問 1			問 2		問 1			問 2				
解答欄	ABCD	EF	GHI	JKLM	NOP	QR	ABC	D	EFG	H	I	JK	LMNOPQ
正解	1120	34	443	1645	845	45	-18	9	371	3	4	23	202581

問	IV											
	問 1						問 2					
解答欄	ABC	D	E	F	G	H	I	JK	LMN	O	PQ	RSTU
正解	-13	1	0	7	1	7	1	32	175	2	53	8530

コース 2

問	I									
	問 1					問 2				
解答欄	ABCD	E	FG	H	IJKL	MNO	PQ	RS	T	U
正解	2342	0	02	2	2342	112	-8	10	3	7

問	II													
	問 1							問 2						
解答欄	A	B	C	DE	F	G	H	I	J	K	LM	NO	P	Q
正解	7	6	2	33	1	8	8	8	8	4	16	44	8	9

問	III													
	問 1							問 2						
解答欄	AB	CD	EF	GH	IJ	KL	M	N	OPQR	ST	U	V	W	
正解	13	16	37	47	23	89	0	0	1212	12	2	4	1	

問	IV											
	問 1						問 2					
解答欄	AB	CDE	FG	HIJ	KL	M	N	OP	QRST	U	VWXY	
正解	32	-12	31	-12	52	2	2	33	3222	3	1272	