

# 数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

**I 試験全体に関する注意**

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

**II 問題冊子に関する注意**

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～11ページ、コース2は13～25ページにあります。
4. 足りないページがあったら手をあげて知らせてください。
5. 問題冊子には、メモや計算などを書いてもいいです。

**III 解答用紙に関する注意**

1. 解答は、解答用紙に鉛筆（HB）で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－（マイナスの符号）、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。

**解答方法に関する注意**

- (1) 根号（ $\sqrt{\quad}$ ）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。  
 (例： $\sqrt{12}$ のときは、 $2\sqrt{3}$ と答えます。)
- (2) 符号は分子につけ、分母・分子は既約分数（reduced fraction）にして答えてください。

(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ 、 $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3)  $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、以下のようにマークしてください。
- (4)  $\boxed{DE}x$ を $-x$ とするとき、Dを－、Eを1とし、以下のようにマークしてください。

**【解答用紙】**

A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

3. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号		*				*				
名前										

# 数学 コース 2

(上級コース)

## 「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 50px; height: 50px; margin: 0 auto; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">                     コース 2 Course 2                 </div>
○	●

I

問 1 放物線  $y = 2x^2 + 4x + 5$  を  $x$  軸方向に 4,  $y$  軸方向に  $b$  だけ平行移動して得られる放物線を  $C$  とする。 $x$  の値の範囲が  $a \leq x \leq 2$  のとき,  $C$  をグラフとする 2 次関数の最小値が 1 で最大値が 49 となるような定数  $a, b$  を求めよう。

$$y = 2x^2 + 4x + 5 \text{ は}$$

$$y = 2(x + \boxed{\text{A}})^2 + \boxed{\text{B}}$$

と変形できる。したがって,  $C$  をグラフとする 2 次関数は

$$y = 2(x - \boxed{\text{C}})^2 + \boxed{\text{B}} + b$$

である。この関数が  $a \leq x \leq 2$  において最小値 1 と最大値 49 をもつから

$$b = \boxed{\text{DE}}$$

であり,  $a$  は

$$(a - \boxed{\text{C}})^2 = \boxed{\text{FG}}$$

を満たす。これより

$$a = \boxed{\text{HI}}$$

を得る。

問 2 整式  $P = a^4 - 2a^2 + 1$  に対して、整式  $Q$  は

$$3P + 2Q = 3a^4 + 6a - 9$$

を満たす。このとき

(1)  $Q = \boxed{\text{J}}a^2 + \boxed{\text{K}}a - \boxed{\text{L}}$  である。

(2)  $P, Q$  はそれぞれ

$$P = (a - \boxed{\text{M}})^2(a + \boxed{\text{N}})^2, \quad Q = \boxed{\text{O}}(a - \boxed{\text{P}})(a + \boxed{\text{Q}})$$

と因数分解できる。

(3) 集合  $A, B$  をそれぞれ

$$A = \{|a - \boxed{\text{M}}|, |a + \boxed{\text{N}}|\}, \quad B = \{|a - \boxed{\text{P}}|, |a + \boxed{\text{Q}}|\}$$

とする。集合  $X$  に含まれる異なる要素の個数を  $n(X)$  で表すとき

(i)  $n(B) = 1$  ならば、 $a = \frac{\boxed{\text{RS}}}{\boxed{\text{T}}}$  である。

(ii)  $a = 0$  ならば、 $n(A \cup B) = \boxed{\text{U}}$ 、 $n(A \cap B) = \boxed{\text{V}}$  である。

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わりです。I の解答欄 W ~ Z には何も書かないでください。

II

等差数列  $\{a_n\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) において  $a_5 = -27$ ,  $a_{16} = 28$  とする。

- (1) 公差を  $d$  とすると、与えられた2つの条件式より

$$a_1 + \boxed{\text{A}} d = \boxed{\text{BCD}}, \quad a_1 + \boxed{\text{EF}} d = \boxed{\text{GH}}$$

を得る。これより,  $a_1 = \boxed{\text{IJK}}$ ,  $d = \boxed{\text{L}}$  である。

- (2) 初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を  $n$  の式で表すと

$$S_n = \frac{n}{2} (\boxed{\text{M}} n - \boxed{\text{NO}})$$

となる。

- (3)  $T_n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_n}$  を  $n$  の式で表すと

$$T_n = \frac{1}{2^{\boxed{\text{PQ}}}} \cdot \frac{\boxed{\text{RS}}^n - \boxed{\text{T}}}{\boxed{\text{UV}}}$$

となる。

- 計算欄 (memo) -

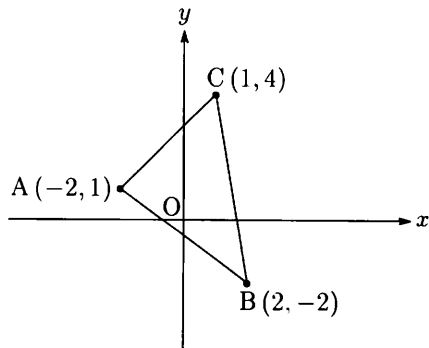
II の問題はこれで終わりです。II の解答欄 W ~ Z には何も書かないでください。

III

原点を  $O$  とする  $xy$  平面上に 3 点

$$A(-2, 1), B(2, -2), C(1, 4)$$

をとり,  $\triangle ABC$  を考える.  $x$  軸上に点  $P$ ,  
第 1 象限内に点  $Q$  をとり,  $\triangle OPQ$  が  
 $\triangle ABC$  と合同になるようにしたい. ベク  
トルを用いて, 点  $P, Q$  の座標を求めよう.



ベクトル  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  の成分はそれぞれ

$$(\boxed{A}, -3), (\boxed{B}, 3)$$

であるから,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  の内積の値は

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \boxed{C}$$

である. また

$$|\overrightarrow{AB}| = \boxed{D}, |\overrightarrow{AC}| = \boxed{E} \sqrt{\boxed{F}}$$

であるから,  $\angle BAC = \theta$  とおくと

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{\boxed{G}}}{\boxed{HI}}, \quad \sin \theta = \frac{\boxed{J} \sqrt{\boxed{K}}}{\boxed{LM}}$$

である.

したがって, 点  $P, Q$  の座標は, それぞれ

$$(\boxed{N}, 0), \left( \frac{\boxed{O}}{\boxed{P}}, \frac{\boxed{QR}}{\boxed{S}} \right)$$

である.

注) 第 1 象限 : first quadrant, 合同な : congruent, 内積 : inner product



- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 T ~ Z には何も書かないでください。

IV

問 1  $a, b$  を定数,  $t$  を正の数とする。  $x$  の 3 次関数

$$f(x) = 4x^3 + 4ax^2 + bx$$

は,  $x = t$  で極小値 0 をとるとする。

このとき,  $a, b$  を  $t$  で表すと

$$a = \boxed{\text{AB}} t, \quad b = \boxed{\text{C}} t^2$$

である。

曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸によって囲まれた部分の面積を  $S_1$  とすると

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}} t^{\boxed{\text{F}}}$$

である。

一方, 曲線  $y = f(x)$  の原点における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{G}} t^2 x$$

であり, この接線と  $y = f(x)$  の共有点の  $x$  座標は, 0 と  $\boxed{\text{H}} t$  である。

この接線と  $y = f(x)$  によって囲まれた部分の面積を  $S_2$  とすると

$$S_2 = \frac{\boxed{\text{IJ}}}{\boxed{\text{K}}} t^{\boxed{\text{L}}}$$

である。

したがって,  $\frac{S_2}{S_1}$  は  $t$  の値によらず, 一定の値  $\boxed{\text{MN}}$  をとる。

- 計算欄 (memo) -

数学—24

問 2  $x$  の関数  $f(x)$  を

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

とする。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

(1)  $f(x)$  を最大にする  $x$  の値を  $x = a$  とすると、 $a = \frac{\sqrt{\boxed{\text{O}}}}{\boxed{\text{P}}}$  であり、その最大値は  $\frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{Q}}}e}$  である。

(2) 関数  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸、および、直線  $x = a$  によって囲まれる部分の面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{\boxed{\text{R}}} - \frac{1}{\boxed{\text{S}}\sqrt{e}}$$

である。

(3)  $t > 0$  とする。関数  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸、および、直線  $x = t$  によって囲まれる部分の面積を  $S(t)$  とすると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{1}{\boxed{\text{T}}}$$

である。

---

注) 自然対数の底 : the base of the natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 U ~ Z には何も書かないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の V の欄には何も書かないでください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉

コース 1

問	I										
	問 1					問 2					
解答欄	AB	C	DE	FG	HI	JKL	MN	OPQ	RST	U	V
正解	13	3	-4	25	-2	336	11	312	-12	2	1

問	II									
	問 1				問 2					
解答欄	ABC	DEFG	HIJKL	MNO	P	QRS	TU	V	W	X
正解	421	4105	73105	415	4	264	11	7	1	7

問	III												
	解答欄	AB	CDE	FGH	IJ	KL	M	NO	PQ	R	ST	UV	WXY
正解	27	357	125	28	16	2	56	40	0	27	27	210	

問	IV			
	解答欄	AB	CDE	FG
正解	43	244	13	3

コース 2

問	I										
	問 1					問 2					
解答欄	AB	C	DE	FG	HI	JKL	MN	OPQ	RST	U	V
正解	13	3	-4	25	-2	336	11	312	-12	2	1

問	II						
	解答欄	ABCD	EFGH	IJK	L	MNO	PQ
正解	4-27	1528	-47	5	599	47	32131

問	III									
	解答欄	A	B	C	D	EF	GHI	JKLM	N	OP
正解	4	3	3	5	32	210	7210	5	35	215

問	IV										
	問 1						問 2				
解答欄	AB	C	DEF	G	H	IJKL	MN	OP	Q	RS	T
正解	-2	4	134	4	2	1634	16	22	2	22	2