

数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら手をあげて知らせてください。
5. 問題冊子には、メモや計算などを書いてもいいです。

III 解答用紙に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

解答方法に関する注意

- (1) 根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例： $\sqrt{12}$ のときは、 $2\sqrt{3}$ と答えます。)
- (2) 符号は分子につけ、分母・分子は既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ 、 $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)
- (3) $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、以下のようにマークしてください。
- (4) $\boxed{DE}x$ に $-x$ と答える場合は、Dを－、Eを1とし、以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

3. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*					
名前												

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px; display: inline-block;"> コース 2 Course 2 </div>
○	●

I

問 1 x の 2 次関数

$$y = a(x^2 - 2x - 8) + x \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

がある。ここで、 a は 0 以外の実数である。

(1) $\textcircled{1}$ のグラフの軸の方程式が $x = \frac{3}{4}$ であれば、 $a = \boxed{\text{A}}$ である。このとき、 $7x + y$ は $x = -\boxed{\text{B}}$ において最小値 $-\boxed{\text{CD}}$ をとる。

(2) $\textcircled{1}$ のグラフ上の点について考える。例えば、 x 座標が 2 であるような $\textcircled{1}$ のグラフ上の点 $(2, -\boxed{\text{E}}a + \boxed{\text{F}})$ の位置は、 a の値とともに変わる。しかし、2 点

$$(\boxed{\text{G}}, \boxed{\text{H}}) \quad \text{と} \quad (-\boxed{\text{I}}, -\boxed{\text{J}})$$

は a の値に関係なく、つねに $\textcircled{1}$ のグラフ上にある。

- 計算欄 (memo) -

問 2 x の整式

$$P = (x+1)(x+2)(x+4)(x+5) - 10$$

を考える。

(1) P を因数分解すると

$$P = (x^2 + \boxed{K}x + \boxed{L})(x^2 + \boxed{M}x + \boxed{NO})$$

である。

(2) $x = -3 + \sqrt{5}$ のとき

$$P = \boxed{PQ}$$

である。

(3) x の整式

$$Q = (2x+1)(2x+2)(2x+4)(2x+5) - 10$$

を因数分解すると

$$Q = \boxed{R} (\boxed{S}x^2 + \boxed{TU}x + \boxed{V})(\boxed{W}x^2 + \boxed{X}x + \boxed{Y})$$

である。

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わりです。I の解答欄 Z は空欄のままにしてください。

II

3 で割った余りが 2 となり、かつ、4 で割った余りが 3 となる自然数を小さい順に並べた数列 $\{a_n\} (n = 1, 2, 3, \dots)$ について考える。

(1) $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = \boxed{\text{AB}}n - \boxed{\text{C}}$ である。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n(\boxed{\text{D}}n + \boxed{\text{E}})$$

であり、初項から第 n 項までの各項の 2 乗の和は

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = n(\boxed{\text{FG}}n^2 + \boxed{\text{HI}}n + \boxed{\text{JK}})$$

である。

(3) $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの n 個の項のうち、異なる 2 項の積の総和を S とおく。

このとき

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \boxed{\text{L}}S$$

に、(2) の結果を代入して、整理すると

$$S = \frac{n}{2}(36n^3 + \boxed{\text{MN}}n^2 - 35n - \boxed{\text{OP}})$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わります。II の解答欄 Q ～ Z は空欄のままにしてください。

III

xy 平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(4, -2)$ を通る円を考え, その中心を C とする。

(1) この円の方程式は

$$x^2 + y^2 - \boxed{A}x - \boxed{B}y = \boxed{C}$$

である。したがって, この円の半径は $\sqrt{\boxed{DE}}$ であり, 中心 C の座標は (\boxed{F}, \boxed{G}) である。

(2) ベクトル \overrightarrow{CA} と \overrightarrow{CB} の内積は \boxed{H} であるから, $\angle ACB = \theta$ とおくと

$$\cos \theta = \frac{\boxed{I}}{\boxed{J}}$$

である。

(3) 中心 C を通り, x 軸に平行な直線とこの円の交点で x 座標が正であるものを P とおく。この円の周上に点 Q をとり, 弧 \widehat{PQ} の長さが弧 \widehat{AB} の長さの 2 倍となるようにするとき, 点 Q の x 座標は

$$\boxed{K} - \frac{\boxed{L}\sqrt{\boxed{MN}}}{\boxed{OP}}$$

である。ただし, 弧の長さは劣弧の長さを考える。

注) 内積 : inner product , 弧 : arc , 劣弧 : minor arc

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 Q ~ Z は空欄のままにしてください。

IV

問 1 次の 2 つの関数

$$y = -x^2 + x + 2 \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

$$y = x^2 - x - 2 \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

を考える。以下では、点 $(-1, 0)$ における曲線 ① の接線を l とする。

(1) 直線 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{A}}x + \boxed{\text{B}}$$

である。

(2) 曲線 ② と直線 l の交点の x 座標は $\boxed{\text{CD}}$ と $\boxed{\text{E}}$ である。

(3) 次に、曲線 ① と曲線 ② および直線 l で囲まれた図形の面積 S を求めよう。

曲線 ② と直線 l で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{FG}}$ であり、曲線 ① と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$ である。したがって、求める面積 S は $\boxed{\text{JK}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2 x の関数 $f(x) = \frac{\log 3x}{x}$ を考える。ただし、 \log は自然対数とする。

(1) 関数 $f(x)$ は $x = \frac{e}{\boxed{\text{L}}}$ で極大値 $\frac{\boxed{\text{M}}}{e}$ をとる。

(2) $a > 0$ とし、 $(3x)^a = (3a)^x$ を満たす正の数 x の個数を N とする。
 このとき、 $y = f(x)$ のグラフを用いて N を求めると次のようになる。
 ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ を用いてもよい。

$$0 < a \leq \frac{1}{\boxed{\text{N}}} \quad \text{ならば} \quad N = \boxed{\text{O}}$$

$$\frac{1}{\boxed{\text{N}}} < a < \frac{e}{\boxed{\text{P}}} \quad \text{ならば} \quad N = \boxed{\text{Q}}$$

$$a = \frac{e}{\boxed{\text{P}}} \quad \text{ならば} \quad N = \boxed{\text{R}}$$

$$\frac{e}{\boxed{\text{P}}} < a \quad \text{ならば} \quad N = \boxed{\text{S}}$$

注) 自然対数 : natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 T ~ Z は空欄のままにしてください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の V は空欄のままにしてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉

コース 1			
問	解答欄	正解	
I	問 1	A	2
		B	1
		CD	18
		EF	82
		GH	44
		IJ	22
	問 2	KL	63
		MNO	610
		PQ	-6
		R	2
		STUV	4123
		WXY	265
II	問 1	A	2
		B	4
		CD	15
		EF	25
		GHI	165
	問 2	J	1
		K	4
		LMN	223
		O	4
		PQ	12
III		AB	14
		C	1
		DE	-2
		FGH	-13
		I	2
IV		AB	10
		CDEF	3154
		GHI	-14
		J	2
		KLM	152

コース 2			
問	解答欄	正解	
I	問 1	A	2
		B	1
		CD	18
		EF	82
		GH	44
		IJ	22
	問 2	KL	63
		MNO	610
		PQ	-6
		R	2
		STUV	4123
		WXY	265
II		ABC	121
		DE	65
		FGHIJK	486013
		L	2
		MNOP	1213
III		ABC	620
		DE	10
		FG	31
		H	6
		IJ	35
		KLMNOP	371025
IV	問 1	AB	33
		CD	-1
		E	5
		FG	36
		HI	92
		JK	27
	問 2	L	3
		M	3
		NO	31
		PQ	32
		R	1
		S	2