問題冊子

平成21年度（2009年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら手をあげて知らせてください。

5．問題冊子には，メモや計算などを書いてもいいです。

III　解答用紙に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。

2．問題文中のA, B, C, … には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

解答方法に関する注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
　(例：$\sqrt{12}$ のときは，$2\sqrt{3}$ と答えます。)

(2)　符号は分子につけ，分母・分子は既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
　(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，以下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊				＊					
名　　前												

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　$6-\sqrt{5}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。このとき

$$a = \boxed{\mathsf{A}}, \qquad b + \frac{4}{b} = \boxed{\mathsf{B}}$$

である。

　また

$$b^3 + \left(\frac{4}{b}\right)^3 = \left(b + \frac{4}{b}\right)^{\boxed{\mathsf{C}}} - \boxed{\mathsf{DE}}\left(b + \frac{4}{b}\right)$$

であるから

$$4a^3 - \left\{b^3 + \left(\frac{4}{b}\right)^3\right\} = \boxed{\mathsf{FGH}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

問 2　$a>0$ とし，x の 2 次関数

$$y=3ax^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

(1)　① のグラフを x 軸方向に $2a$，y 軸方向に $12a$ だけ平行移動すると，そのグラフを表す 2 次関数は

$$y=3a(x-\boxed{\mathsf{I}}\,a)^2+\boxed{\mathsf{JK}}\,a$$

である。さらに，このグラフと直線 $y=12a$ に関して対称なグラフを表す 2 次関数は

$$y=\boxed{\mathsf{LM}}\,a(x^2-\boxed{\mathsf{N}}\,ax+\boxed{\mathsf{O}}\,a^2-\boxed{\mathsf{P}}) \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

となる。① と ② のグラフが異なる 2 点で交わるとき，a のとりうる値の範囲は

$$0<a<\sqrt{\boxed{\mathsf{Q}}}$$

である。

(2)　(1) において，a が整数の場合を考える。このとき，① と ② のグラフの交点の x 座標は $\boxed{\mathsf{R}}$ と $\boxed{\mathsf{S}}$ である。ただし，$\boxed{\mathsf{R}}<\boxed{\mathsf{S}}$ とする。さらに，直線 $x=k$ ($\boxed{\mathsf{R}}<k<\boxed{\mathsf{S}}$) と ①, ② のグラフの交点をそれぞれ P, Q とする。線分 PQ の長さを k の式で表すと

$$\mathrm{PQ}=-\boxed{\mathsf{T}}\,k^2+\boxed{\mathsf{UV}}\,k$$

となるから，$k=\boxed{\mathsf{W}}$ のとき，PQ の値は最も大きくなる。

\- 計算欄 (memo) -

| I | の問題はこれで終わりです。 | I | の解答欄 | X | ～ | Z | は空欄のままにしてください。

II

等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ は，どちらも初項が c，すなわち，$a_1 = c$，$b_1 = c$ であって，$\{a_n\}$ の公差と $\{b_n\}$ の公比は同じ正の数 d であるとする。

(1)　$a_5 = b_3$ かつ $a_7 = b_5$ が成り立つとき，c と d の値を求めよう。

上の条件式を順に c, d を用いて表すと

$$c + \boxed{\mathsf{A}}\,d = cd^{\boxed{\mathsf{B}}}, \qquad c + \boxed{\mathsf{C}}\,d = cd^{\boxed{\mathsf{D}}}$$

となる。この 2 式から c を消去すると，$d = \dfrac{\sqrt{\boxed{\mathsf{E}}}}{\boxed{\mathsf{F}}}$ が得られ，これより

$$c = \boxed{\mathsf{GH}}\sqrt{\boxed{\mathsf{I}}}$$

も得られる。

(2)　c と d が (1) で求めた値のとき，$\{b_n\}$ の初項から第 $2m$ 項までのうち，有理数となる項の和は

$$\boxed{\mathsf{J}}\left\{\left(\frac{\boxed{\mathsf{K}}}{\boxed{\mathsf{L}}}\right)^m - \boxed{\mathsf{M}}\right\}$$

である。

注）等差数列：arithmetic progression，等比数列：geometric progression，

公差：common difference，公比：common ratio

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{N}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄のままにしてください。

III

c は実数とする。不等式

$$x^2+y^2+4x-8y+c<0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

と連立不等式

$$\begin{cases} x-y+8>0 \\ 4x+3y-24<0 \\ y>0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考える。不等式 ① が解をもつとき，①, ② が表す領域を参考にして，次の各問に答えなさい。

(1) 不等式 ① が表す領域の境界は中心が $(\boxed{\text{AB}}, \boxed{\text{C}})$ であり，半径が $\sqrt{\boxed{\text{DE}}-c}$ の円である。

(2) 次の 2 つの条件 p, q を考える。

p : x と y は不等式 ① を満たす
q : x と y は連立不等式 ② を満たす

このとき，p が q の十分条件となるような c の値の範囲は

$$\boxed{\text{FG}} \leqq c < \boxed{\text{HI}}$$

である。

また，p が q の必要条件となるような c の値の範囲は

$$c \leqq \boxed{\text{JKL}}$$

である。

注） 領域 : region , 境界 : boundary

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{M}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄のままにしてください。

IV

問 1　関数 $f(x)$ は

$$x \leqq 3 \text{ のとき} \quad f(x) = x + 1$$

$$x > 3 \text{ のとき} \quad f(x) = -2x + 10$$

で与えられている。このとき，$x \geqq 0$ に対して，関数 $g(x)$ が

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

で定められている。

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$g(x) = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}} x^{\boxed{\text{C}}} + x$$

であり，$x > 3$ のとき

$$g(x) = -x^2 + \boxed{\text{DE}}\,x - \frac{\boxed{\text{FG}}}{\boxed{\text{H}}}$$

である。

(2)　曲線 $y = g(x)$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}\bigl(a,\, g(a)\bigr)$（ただし，$a > 3$）における C の接線が点 $\left(0,\, \dfrac{5}{2}\right)$ を通るとき，その傾きは $\boxed{\text{I}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　関係式

$$f(x) = 3x + 3\int_0^x f(t)\,dt + 4\int_0^1 f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を求めよう。

まず

$$f(0) = \boxed{\text{J}}\int_0^1 f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

である。

次に，① の両辺を x で微分すると

$$f'(x) = \boxed{\text{K}}\left(\boxed{\text{L}} + f(x)\right)$$

を得る。これより

$$\frac{\left(\boxed{\text{L}} + f(x)\right)'}{\boxed{\text{L}} + f(x)} = \boxed{\text{K}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

ここで，③ の両辺を x で積分して変形すると

$$f(x) = Ce^{\boxed{\text{M}}\,x} - \boxed{\text{N}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

となる。ただし，C は定数である。

よって，② より，④ の C の値を求めると

$$C = \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}\,e^{\boxed{\text{Q}}} - \boxed{\text{R}}}$$

となり，$f(x)$ が求まる。

注）微分可能な：differentiable

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{S}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄のままにしてください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ は空欄のままにしてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数　学〉

コース１

問		解答欄	正解
I	問 1	A	3
		B	6
		CDE	312
		FGH	−36
	問 2	IJK	212
		LMNOP	−3444
		Q	2
		RS	02
		TUV	612
		W	1
II	問 1	AB	16
		CDE	512
		FGH	512
		IJK	136
		LMN	516
	問 2	OPQR	9278
		STUVW	36327
		XYZ	718
III		A	2
		B	1
		C	1
		D	2
		EF	02
		GH	03
		IJ	04
IV		AB	35
		CD	45
		EFG	485
		HI	45
		JKL	154
		MN	25
		OPQR	1207

コース２

問		解答欄	正解
I	問 1	A	3
		B	6
		CDE	312
		FGH	−36
	問 2	IJK	212
		LMNOP	−3444
		Q	2
		RS	02
		TUV	612
		W	1
II		AB	42
		CD	64
		EF	22
		GHI	−42
		JKLM	8121
III		ABC	−24
		DE	20
		FG	18
		HI	20
		JKL	−60
IV	問 1	ABC	122
		DEFGH	10272
		I	2
	問 2	J	4
		KL	31
		MN	31
		OPQR	9437