

数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら手をあげて知らせてください。
5. 問題冊子には、メモや計算などを書いてもいいです。

III 解答用紙に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

解答方法に関する注意

- (1) 根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例： $\sqrt{12}$ のときは、 $2\sqrt{3}$ と答えます。)
- (2) 符号は分子につけ、分母・分子は既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ 、 $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と有理化してから約分し、 $\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3) $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、以下のようにマークしてください。

- (4) $\boxed{DE}x$ に $-x$ と答える場合は、Dを－、Eを1とし、以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

3. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*					
名前												

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px; display: inline-block;"> コース 2 Course 2 </div>
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 方程式

$$(x - 1)^2 = |3x - 5| \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を考える。

- (1) 方程式 ① の解のうち $x \geq \frac{5}{3}$ を満たす解は、 $x = \text{A}$, B である。ただし、 $\text{A} < \text{B}$ とする。
- (2) 方程式 ① の解は全部で C 個ある。その解のうちで最小のものを α とすると、 $m - 1 < \alpha \leq m$ を満たす整数 m は DE である。

- 計算欄 (memo) -

問 2 実数 x, y に関する次の 3 つの条件 (a), (b), (c) を考える。

(a) $x + y = 5$, $xy = 3$ を満たす

(b) $x + y = 5$, $x^2 + y^2 = 19$ を満たす

(c) $x^2 + y^2 = 19$, $xy = 3$ を満たす

(1) 等式 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - \boxed{\text{F}}xy$ を用いると

条件 (b) のとき $xy = \boxed{\text{G}}$,

条件 (c) のとき $x + y = \boxed{\text{H}}$ または $x + y = \boxed{\text{IJ}}$

が得られる。

(2) 次の $\boxed{\text{K}} \sim \boxed{\text{M}}$ には, 下の ① ~ ③ のうちから適するものを一つずつ選びなさい。

(i) (a) は (b) であるための $\boxed{\text{K}}$ 。

(ii) (b) は (c) であるための $\boxed{\text{L}}$ 。

(iii) (c) は (a) であるための $\boxed{\text{M}}$ 。

① 必要十分条件である

② 十分条件であるが, 必要条件ではない

③ 必要条件であるが, 十分条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わりです。I の解答欄 N ~ Z はマークしないでください。

II

xy 平面上に 2 直線

$$y = 1, \quad y = -1$$

および点 $A(0, 3)$ が与えられている。

いま、直線 $y = 1$ 上に点 P を、直線 $y = -1$ 上に点 Q をとり

$$\angle PAQ = 90^\circ$$

であるとする。2 点 P, Q がこれらの条件を満たして動くとき、線分 PQ の長さの最小値を求めよう。

まず、 P の座標を $(\alpha, 1)$ 、 Q の座標を $(\beta, -1)$ とする。このとき、 $\angle PAQ = 90^\circ$ を満たすことは、 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ で

$$\alpha\beta = \boxed{\text{AB}}$$

となることである。よって、 α, β は異符号であるから、 $\alpha < 0 < \beta$ としよう。

このとき

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\beta - \alpha)^2 + \boxed{\text{C}} \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \boxed{\text{DE}} \\ &\geq 2|\alpha\beta| + \boxed{\text{DE}} = \boxed{\text{FG}} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$PQ \geq \boxed{\text{H}}$$

である。よって、 PQ は

$$\alpha = \boxed{\text{IJ}} \sqrt{\boxed{\text{K}}}, \quad \beta = \boxed{\text{L}} \sqrt{\boxed{\text{M}}}$$

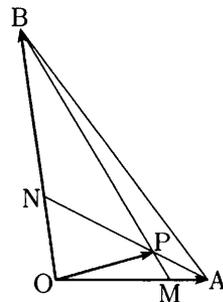
のとき、最小値 $\boxed{\text{H}}$ をとる。

- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わりです。II の解答欄 N ～ Z はマークしないでください。

III

三角形 OAB を考える。辺 OA を 3 : 1 に内分する点 を M, 辺 OB を 1 : 2 に内分する点 を N とし, 線分 AN と線分 BM の交点 を P とする。



- (1) ベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} とおくととき, ベクトル \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} で表すことを考える。

$$AP : PN = s : (1 - s) \quad (0 < s < 1)$$

$$BP : PM = t : (1 - t) \quad (0 < t < 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \left(\boxed{\text{A}} - s \right) \vec{a} + \frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}} s \vec{b} \\ &= \frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}} t \vec{a} + \left(\boxed{\text{F}} - t \right) \vec{b} \end{aligned}$$

が成り立つから

$$s = \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}}, \quad t = \frac{\boxed{\text{I}}}{\boxed{\text{J}}}$$

である。したがって, \overrightarrow{OP} は \vec{a} , \vec{b} を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}} \vec{b}$$

と表される。

(問は次ページに続く)

(2) $OA = 6$, $OB = 9$ のとき, 線分 OP の長さ と $\angle AOB$ の大きさとの関係を調べよう。

OP の長さを l とおくと、 l^2 を \vec{a} と \vec{b} の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を用いて表すと

$$l^2 = \frac{\boxed{O}}{\boxed{PQ}} \vec{a} \cdot \vec{b} + \boxed{RS}$$

を得る。

したがって、例えば、 $l = 4$ のとき

$$\cos \angle AOB = \frac{\boxed{TU}}{\boxed{V}}$$

である。

一方、 $\angle AOB$ の大きさを変えると、 l のとり得る値の範囲は

$$\boxed{W} < l < \boxed{X}$$

である。

\boxed{III} の問題はこれで終わりです。 \boxed{III} の解答欄 \boxed{Y} , \boxed{Z} はマークしないでください。

IV

問 1 x の関数 $f(x) = \log(4x - \log x)$ がある。ここで、 \log は自然対数とする。 $f''(x)$ を求めて $f(x)$ の極値を調べよう。

ただし、 $\boxed{\text{K}}$ 、 $\boxed{\text{L}}$ には、下の ①～⑥ のうちから最も適するもの一つずつ選びなさい。

まず、 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ を求めると

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{A}} - \frac{\boxed{\text{B}}}{x}}{4x - \log x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x\boxed{\text{C}}}(4x - \log x) - \left(\boxed{\text{A}} - \frac{\boxed{\text{B}}}{x}\right)^{\boxed{\text{D}}}}{(4x - \log x)^2}$$

となる。これより

$$f'\left(\frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}\right) = 0$$

$$f''\left(\frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}\right) = \frac{\boxed{\text{GH}}}{\boxed{\text{I}} + \log \boxed{\text{J}}}$$

となる。このとき

$$f''\left(\frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}\right) \boxed{\text{K}} 0$$

であるから、 $f(x)$ は $x = \frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}$ で $\boxed{\text{L}}$ となる。また、そのときの値は

$\log(\boxed{\text{M}} + \log \boxed{\text{N}})$ である。

- ① = ② > ③ ≥ ④ < ⑤ ≤ ⑥ 極大 ⑦ 極小

- 計算欄 (memo) -

問 2 曲線 $y = 2 \cos 2x$ と曲線 $y = 4 \cos x + k$ は、 $x = a$ ($0 < a \leq \frac{\pi}{2}$) で共通の接線をもつとする。

(1) $f(x) = 2 \cos 2x$, $g(x) = 4 \cos x + k$ とおく。題意より、2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は $x = a$ で共通の接線をもつから

$$f'(a) = g'(a), \quad f(a) = g(a)$$

である。

$$f'(a) = g'(a) \text{ と } 0 < a \leq \frac{\pi}{2} \text{ から } a = \frac{\pi}{\boxed{\text{O}}} \text{ であり, } f(a) = g(a) \text{ から } k = -\boxed{\text{P}}$$

を得る。

したがって、接点の座標は $\left(\frac{\pi}{\boxed{\text{O}}}, -\boxed{\text{Q}} \right)$ であり、共通の接線の方程式は

$$y = -\boxed{\text{R}} \sqrt{\boxed{\text{S}}} \left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{T}}} \right) - \boxed{\text{U}}$$

である。

(2) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において、この 2 つの曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよう。

2 つの曲線はともに y 軸に関して対称であるから、 $b = \boxed{\text{V}}$, $c = \frac{\pi}{\boxed{\text{O}}}$ として

$$S = \boxed{\text{W}} \int_b^c (2 \cos 2x - 4 \cos x - k) dx$$

であり、これを計算して

$$S = \boxed{\text{X}} \pi - \boxed{\text{Y}} \sqrt{\boxed{\text{Z}}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

Ⅳ の問題はこれで終わりです。

コース2の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の Ⅴ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース2」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉

コース 1				
問	解答欄	正解		
I	問 1	A	2	
		B	3	
		C	4	
		DE	-2	
	問 2	F	2	
		G	3	
		H	5	
		IJ	-5	
		K	0	
		L	1	
		M	2	
	II	問 1	AB	96
			CD	24
			EFG	500
H			6	
I			3	
JK			48	
LM			45	
問 2		NO	10	
		PQ	35	
		RSTU	5103	
		VW	53	
		XYZ	263	
		AB	-5	
		C	3	
III	DEF	-35		
	GHI	-27		
	JKLM	-9-7		
	NOPQ	-5-3		
	AB	21		
	CD	31		
	EFGH	4946		
IV	IJ	16		
	K	4		
	L	6		
	M	3		
	NO	-2		

コース 2				
問	解答欄	正解		
I	問 1	A	2	
		B	3	
		C	4	
		DE	-2	
	問 2	F	2	
		G	3	
		H	5	
		IJ	-5	
		K	0	
		L	1	
		M	2	
	II	問 1	AB	-8
			C	4
			DE	20
FG			36	
H			6	
IJK			-22	
LM			22	
ABC			113	
DEF			341	
GH			13	
III	問 1	IJ	89	
		JKLMN	2319	
		OPQRS	42717	
		TUV	-18	
		WX	35	
		AB	41	
		CD	22	
		EF	14	
		GHIJ	1614	
		K	1	
IV	問 2	L	6	
		MN	14	
		O	3	
		P	3	
		Q	1	
		RSTU	2331	
		V	0	
		W	2	
XYZ	233			