問題冊子

平成22年度（2010年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　**試験全体に関する注意**

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　**問題冊子に関する注意**

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら手をあげて知らせてください。

5．問題冊子には，メモや計算などを書いてもいいです。

III　**解答用紙に関する注意**

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。

2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

解答方法に関する注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例：$\sqrt{12}$ のときは，$2\sqrt{3}$ と答えます。)

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，以下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*						
名　　前													

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース 1」と「コース 2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース 2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース 2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　a を正の定数とし，x の 2 次関数

$$y = 2x^2 - 4(a+1)x + a^2 + 6a + 4$$

のグラフを F とする。

(1)　グラフ F の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(a + \boxed{\text{A}},\ -a^2 + \boxed{\text{B}}\,a + \boxed{\text{C}}\right)$$

である。

(2)　グラフ F が x 軸と接するのは

$$a = \boxed{\text{D}} + \sqrt{\boxed{\text{E}}}$$

のときである。

(3)　(2) のグラフを x 軸方向に $-\sqrt{3}$，y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式は

$$y = \boxed{\text{F}}\,x^2 - \boxed{\text{G}}\,x + \boxed{\text{H}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　a を実数とし

$$(x+2)|x-1| = |x+2|(x-1)+a$$

を満たす実数 x の集合を S で表す。

集合 S の要素の個数を調べるために，関数

$$f(x) = (x+2)|x-1| - |x+2|(x-1)$$

を考える。

この関数は

$x \leqq \boxed{\text{IJ}}$ のとき，$f(x) = \boxed{\text{K}}$

$\boxed{\text{IJ}} < x \leqq \boxed{\text{L}}$ のとき，$f(x) = -\boxed{\text{M}}x^2 - \boxed{\text{N}}x + \boxed{\text{O}}$

$\boxed{\text{L}} < x$ のとき，$f(x) = \boxed{\text{P}}$

である。

よって，S がただ 1 個の要素からなるような a の値は $a = \dfrac{\boxed{\text{Q}}}{\boxed{\text{R}}}$ で，S がちょうど 2 個の要素からなるような a の値の範囲は $\boxed{\text{S}} < a < \dfrac{\boxed{\text{T}}}{\boxed{\text{U}}}$ である。また，$a = \boxed{\text{V}}$ のとき，S の要素は無数にある。その他の a の値に対しては，S は空集合となる。

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{W}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

xy 平面上の点 $(0, 1)$ を R とする。点 P は x 軸上の正の部分を動き，点 Q は直線 $y = 1$ 上を $\angle\mathrm{RPQ} = \dfrac{5}{6}\pi$ となるように動くとする。このとき，三角形 PQR の面積の最小値を求めよう。

(1)　$\angle\mathrm{PRQ} = \theta$ とおく。このとき

$$\mathrm{PR} = \boxed{\mathsf{A}}, \qquad \mathrm{PQ} = \boxed{\mathsf{B}}$$

である。ただし，$\boxed{\mathsf{A}}$，$\boxed{\mathsf{B}}$ には，下の ⓪ ～ ⑦ のうちから最も適するものを一つずつ選びなさい。

⓪ $\dfrac{1}{\sin\theta}$　① $\dfrac{1}{\cos\theta}$　② $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$　③ $\dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$

④ $\dfrac{1}{\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta}$　⑤ $\dfrac{2}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$　⑥ $\dfrac{1}{\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta}$　⑦ $\dfrac{2}{\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta}$

(2)　三角形 PQR の面積を S とおくと，(1) より

$$S = \frac{1}{\boxed{\mathsf{C}}\left(\sin\theta\cos\theta - \sqrt{\boxed{\mathsf{D}}}\sin^2\theta\right)}$$

と表される。S の最小値を求めるには，上の式の分母が最大になる場合を考えればよい。

$$\boxed{\mathsf{C}}\left(\sin\theta\cos\theta - \sqrt{\boxed{\mathsf{D}}}\sin^2\theta\right) = \boxed{\mathsf{E}}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{\boxed{\mathsf{F}}}\right) - \sqrt{\boxed{\mathsf{G}}}$$

であるから，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{HI}}}$ のとき S は最小となり，その最小値は $\boxed{\mathsf{J}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{K}}}$

である。

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{L}}$ 〜 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

座標空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,0,0),\quad \mathrm{A}(0,0,2),\quad \mathrm{B}(2,1,0),\quad \mathrm{C}(0,2,0)$$

を頂点とする四面体 OABC を考える。三角形 ABC を底面としたとき，この四面体の高さをベクトルを用いて求めよう。

(1)　底面の三角形 ABC 内に点 P をとり，2 点 A, P を通る直線と線分 BC との交点を Q とする。このとき，BQ : QC = $s : (1-s)$ とおくと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分は

$$\left(\boxed{\mathsf{A}} - \boxed{\mathsf{B}}\,s,\ \boxed{\mathsf{C}} + s,\ \boxed{\mathsf{D}}\right)$$

である。したがって，AP : PQ = $t : (1-t)$ とおくと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分は

$$\left(\boxed{\mathsf{E}}\,t - \boxed{\mathsf{F}}\,st,\ t + st,\ \boxed{\mathsf{G}} - \boxed{\mathsf{H}}\,t\right)$$

である。

(2)　OP ⊥ AB ならば，s, t は

$$\boxed{\mathsf{I}}\,st - \boxed{\mathsf{J}}\,t + \boxed{\mathsf{K}} = 0$$

を満たす。また，OP ⊥ AC ならば，s, t は

$$st + \boxed{\mathsf{L}}\,t - \boxed{\mathsf{M}} = 0$$

を満たす。この 2 式より

$$s = \frac{\boxed{\mathsf{N}}}{\boxed{\mathsf{O}}},\qquad t = \frac{\boxed{\mathsf{P}}}{\boxed{\mathsf{Q}}}$$

を得る。

以上より，三角形 ABC を底面としたとき，この四面体の高さは $\dfrac{\boxed{\mathsf{R}}}{\boxed{\mathsf{S}}}$ である。

注）四面体 : tetrahedron ，底面 : base

- 計算欄 (memo) -

III	の問題はこれで終わりです。	III	の解答欄	T	～	Z	はマークしないでください。

IV

問 1　x の関数 $f(x) = \dfrac{x^{3x}}{\sqrt{e^x}}$ $(x > 0)$ を考える。このとき次の問いに答えなさい。

ただし，$\boxed{\text{D}}$，$\boxed{\text{J}}$ には，下の ⓪ ～ ④ のうちから最も適するものを一つずつ選びなさい。

$y = f(x)$ とおくと，y の自然対数 $\log y$ は

$$\log y = \boxed{\text{A}}\, x \log x - \frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}} x \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

となる。① の両辺を x で微分すると

$$\boxed{\text{D}} = \boxed{\text{E}} \log x + \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}$$

である。よって，$x = e^{-\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}}$ で $y = f(x)$ は $\boxed{\text{J}}$ になることがわかる。

次に，① の両辺を 1 から e まで x について積分すると

$$\int_1^e \log y\, dx = \frac{e^{\boxed{\text{K}}}}{\boxed{\text{L}}} + \boxed{\text{M}}$$

である。

⓪ $y'y$　　① $\dfrac{y'}{y}$　　② $\dfrac{y}{y'}$　　③ 極大　　④ 極小

注）自然対数：natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

問 2　関数 $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ を考える。

(1)　$f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{N}}(x-\boxed{\text{O}})}{\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^3}$ であるから，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{P}}$ で最小値 $\sqrt{\boxed{\text{Q}}}$ をとる。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=1$，$x=3$ および x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=\pi\int_1^3\left(-1+\frac{\boxed{\text{R}}}{x}+\frac{\boxed{\text{S}}}{4-x}\right)dx$$

$$=\pi\left(\boxed{\text{TU}}\log\boxed{\text{V}}-\boxed{\text{W}}\right)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{X}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数　学〉

コース1			
問		解答欄	正解
I	問1	A	1
		BC	22
		DE	13
		FGH	289
	問2	IJ	−2
		K	0
		L	1
		MNO	224
		P	0
		QR	92
		STU	092
		V	0
II	問1	ABCD	1296
		EFG	256
		HIJ	512
		KL	81
		MN	16
		OP	32
		QR	55
	問2	STUV	5212
		WX	51
		Y	4
		Z	4
III		ABCD	−123
		E	4
		F	1
		G	6
		HIJ	−15
IV		ABC	102
		DEF	121
		GH	12
		IJ	60
		K	3
		LMN	120
		O	9
		P	2
		QRST	2311

コース2			
問		解答欄	正解
I	問1	A	1
		BC	22
		DE	13
		FGH	289
	問2	IJ	−2
		K	0
		L	1
		MNO	224
		P	0
		QR	92
		STU	092
		V	0
II		A	0
		B	7
		CD	23
		EFG	233
		HI	12
		JK	23
III		ABCD	2210
		EFGH	2222
		IJK	394
		LM	32
		NO	35
		PQ	59
		RS	43
IV	問1	ABC	312
		D	1
		EFG	352
		HI	56
		J	4
		KLM	221
	問2	NO	41
		P	1
		Q	3
		RS	19
		TUVW	1032